4. Metoda przewidywania

W niektórych przypadkach w celu rozwiązywania równania niejednorodnego (12) wygodniej jest zastosować *metodę przewidywania* zwaną również *metodą współczynników nieoznaczonych.* Ta metoda opiera się na założeniu, że dla pewnych typów funkcji $f(x)$ po prawej stronie równania (12), rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego powinno być funkcją tego samego typu. Inaczej mówiąc, przewidujemy rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego w postaci prawej strony równania. Metoda przewidywania jest prostsza niż metoda uzmienniania stałych, ponieważ wyznaczamy rozwiązania szczególne równania niejednorodnego bez całkowania. Rozważmy przypadki, dla których metoda przewidywania jest skuteczną.

Przypadek 1. Niech funkcja po prawej stronie równania ma postać

$$f(x) = P_n(x)\mathrm{e}^{kx}, \tag{19}$$

gdzie $P_n(x)$ jest wielomianem stopnia $n \in \mathbb{N}$:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

oraz $k \in \mathbb{R}$ jest dowolną liczba rzeczywistą. Wtedy mamy trzy możliwości:

1. Jeżeli liczba k nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego, tzn.

$$ak^2 + bk + c \neq 0,$$

to równanie niejednorodne (12) ma rozwiązanie szczególne postaci

$$\psi(x) = Q_n(x)\mathrm{e}^{kx},$$

gdzie $Q_n(x)$ jest wielomianem stopnia $n \in \mathbb{N}$:

$$Q_n(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0$$

z nieoznaczonymi współczynnikami $b_n, b_{n-1}, ..., b_1, b_0$. Ponieważ $\psi(x)$ jest rozwiązaniem równania (12), więc podstawiając do równania (12) i porównując współczynniki wielomianów po prawej i lewej stronie otrzymamy układ równań liniowych z niewiadomymi $b_n, b_{n-1}, ..., b_1, b_0$. Zatem rozwiązując ten układ otrzymamy szukane współczynniki wielomianu $Q_n(x)$.

Przykład 7. Rozwiązać równanie

$$y'' - y = x^2\,\mathrm{e}^{2x}. \tag{20}$$

Rozwiązanie. Równanie charakterystyczne dla powyższego równania ma postać

$$\lambda^2 - 1 = 0 .$$

Pierwiastkami tego równania są liczby

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1 .$$

Zatem rozwiązanie ogólne równania jednorodnego ma postać

$$y = C_1 \, \mathrm{e}^x + C_2 \, \mathrm{e}^{-x} ,$$

gdzie C_1 i C_2 są dowolnymi stałymi rzeczywistymi.

Ponieważ

$$f(x) = x^2 \, \mathrm{e}^{2x} ,$$

więc $k = 2$ nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego. Zatem rozwiązanie szczególne równania (20) przewidujemy w postaci

$$\psi(x) = (b_2 x^2 + b_1 x + b_0)\,\mathrm{e}^{2x} .$$

Różniczkując mamy

$$\psi'(x) = (2b_2 x + b_1)\,\mathrm{e}^{2x} + 2(b_2 x^2 + b_1 x + b_0)\,\mathrm{e}^{2x}$$

oraz

$$\psi''(x) = 2b_2 \,\mathrm{e}^{2x} + 2(2b_2 x + b_1)\,\mathrm{e}^{2x} + 2(2b_2 x + b_1)\,\mathrm{e}^{2x} + 4(b_2 x^2 + b_1 x + b_0)\,\mathrm{e}^{2x}$$

.

Po przekształceniu otrzymamy

$$\psi''(x) = (4b_2 x^2 + (8b_2 + 4b_1)x + 2b_2 + 4b_1 + 4b_0)\,\mathrm{e}^{2x} .$$

Podstawiając funkcje $\psi(x)$, $\psi''(x)$ do równania (20) otrzymamy tożsamość

$$(3b_2 x^2 + (8b_2 + 3b_1)x + 2b_2 + 4b_1 + 3b_0)\,\mathrm{e}^{2x} = x^2 \,\mathrm{e}^{2x} .$$

Stąd porównując współczynniki wielomianów po prawej i lewej stronie otrzymamy układ równań postaci

$$\begin{cases} 3b_2 = 1, \\ 8b_2 + 3b_1 = 0, \\ 2b_2 + 4b_1 + 3b_0 = 0. \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ otrzymamy

$$b_2 = \frac{1}{3}, \quad b_1 = -\frac{8}{9}, \quad b_0 = \frac{26}{27} .$$

Wtedy rozwiązanie szczególne równania (20) ma postać

$$\psi(x)=\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{8}{9}x+\frac{26}{27}\right)\mathrm{e}^{2x}.$$

Tak więc szukane rozwiązanie ogólne równania (20) dane jest wzorem

$$y=C_1\,\mathrm{e}^{x}+C_2\,\mathrm{e}^{-x}+\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{8}{9}x+\frac{26}{27}\right)\mathrm{e}^{2x}.$$

2. Jeżeli liczba k jest pierwiastkiem jednokrotnym równania charakterystycznego, to rozwiązanie szczególne równania (12) szukamy w postaci

$$\psi(x)=xQ_n(x)\,\mathrm{e}^{kx},$$

gdzie $Q_n(x)$ jest wielomianem stopnia $n\in\mathbb{N}$ z nieoznaczonymi współczynnikami jak wyżej.

Przykład 8. Rozwiązać równanie

$$y''+2y'-3y=x\,\mathrm{e}^{x}. \tag{21}$$

Rozwiązanie. Mamy tu $k=1$ i stopień wielomianu po prawej stronie $n=1$. Równanie charakterystyczne dla równania jednorodnego ma postać

$$\lambda^2+2\lambda-3=0.$$

Pierwiastkami tego równania są

$$\lambda_1=1,\quad \lambda_2=-3.$$

Zatem liczba $k=1$ jest pierwiastkiem jednokrotnym równania charakterystycznego. Stąd rozwiązania szczególnego równania (21) szukamy w postaci

$$\psi(x)=x(b_1x+b_0)\,\mathrm{e}^{x}.$$

Różniczkując dwa razy otrzymamy

$$\psi'(x)=(2b_1x+b_0)\,\mathrm{e}^{x}+(b_1x^2+b_0x)\,\mathrm{e}^{x},$$

$$\psi''(x)=2b_1\,\mathrm{e}^{x}+(4b_1x+2b_0)\,\mathrm{e}^{x}+(b_1x^2+b_0x)\,\mathrm{e}^{x}.$$

Podstawiając powyższe funkcje do równania (21) otrzymamy równość

$$\begin{aligned}&2b_1+(4b_1x+2b_0)+(b_1x^2+b_0x)+\\&+2(2b_1x+b_0)+2(b_1x^2+b_0x)-\\&-3x(b_1x+b_0)=x.\end{aligned}$$

Po uproszczeniu mamy

$$8b_1x+2b_1+4b_0=x.$$

Zatem porównując współczynniki wielomianów przy odpowiednich potęgach po prawej i lewej stronie otrzymamy układ równań postaci

$$\begin{cases} 8b_1 = 1, \\ 2b_1 + 4b_0 = 0. \end{cases}$$

Stąd mamy

$$b_1 = -\frac{1}{8}, \quad b_0 = \frac{1}{16}.$$

Tak więc rozwiązanie szczególne ma postać

$$\psi(x) = \frac{1}{16} x(1-2x)\,\mathrm{e}^x.$$

Ponieważ rozwiązanie ogólne równania jednorodnego dane jest wzorem

$$y = C_1\,\mathrm{e}^x + C_2\,\mathrm{e}^{-3x},$$

więc szukane rozwiązanie ogólne równania (21) ma postać

$$y = C_1\,\mathrm{e}^x + C_2\,\mathrm{e}^{-3x} + \frac{1}{16} x(1-2x)\,\mathrm{e}^x,$$

gdzie C_1 i C_2 są dowolnymi stałymi rzeczywistymi.

3. Jeżeli liczba k jest pierwiastkiem dwukrotnym równania charakterystycznego, to rozwiązanie szczególne równania (12) szukamy w postaci

$$\psi(x) = x^2 Q_n(x)\,\mathrm{e}^{kx}.$$

Przykład 9. Rozwiązać równanie

$$y'' - 4y' + 4y = x\,\mathrm{e}^{2x}. \tag{22}$$

Rozwiązanie. Równanie charakterystyczne ma postać

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0.$$

Zatem $\lambda = 2$ jest pierwiastkiem podwójnym tego równania. To oznacza, że rozwiązanie ogólne równania jednorodnego możemy zapisać w postaci

$$y = C_1\,\mathrm{e}^{2x} + C_2 x\,\mathrm{e}^{2x}.$$

Ponieważ również $k = 2$, więc rozwiązania szczególnego szukamy w postaci

$$\psi(x) = x^2(b_1 x + b_0)\,\mathrm{e}^{2x}.$$

Różniczkując dwa razy otrzymamy

$$\psi'(x) = (3b_1x^2 + 2b_0x)\,\mathrm{e}^{2x} + 2x^2(b_1x + b_0)\,\mathrm{e}^{2x},$$

$$\psi''(x) = 2(3b_1x + b_0)\,\mathrm{e}^{2x} + 4(3b_1x^2 + 2b_0x)\,\mathrm{e}^{2x} + 4x^2(b_1x + b_0)\,\mathrm{e}^{2x}.$$

Podstawiając $\psi(x)$, $\psi'(x)$ i $\psi''(x)$ do równania (22) i dzieląc obustronnie przez e^{2x} mamy tożsamość

$$2(3b_1x+b_0)+4(3b_1x^2+2b_0x)+4x^2(b_1x+b_0)-$$
$$-4(3b_1x^2+2b_0x)-8x^2(b_1x+b_0)+4x^2(b_1x+b_0)=x.$$

Stąd

$$2(3b_1x+b_0)=x\,.$$

Zatem otrzymamy

$$\begin{cases} 6b_1=1, \\ 2b_0=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1=\dfrac{1}{6}, \\ b_0=0. \end{cases}$$

Tak więc mamy

$$\psi(x)=\frac{1}{6}x^3\,\mathrm{e}^{2x}\,,$$

a zatem rozwiązanie ogólne równania (22) ma postać

$$y=C_1\,\mathrm{e}^{2x}+C_2x\mathrm{e}^{2x}+\frac{1}{6}x^3\,\mathrm{e}^{2x}\,,$$

gdzie C_1 i C_2 są dowolnymi stałymi rzeczywistymi.

Przypadek 2. Niech funkcja po prawej stronie równania (12) ma postać

$$f(x)=\mathrm{e}^{\alpha x}\left(P_n^1(x)\cos\beta x+P_n^2(x)\sin\beta x\right), \tag{23}$$

gdzie $P_n^1(x),\ P_n^2(x)$ są wielomianami stopnia $n\in\mathbb{N}$:

$$P_n^1(x)=a_n^1x^n+a_{n-1}^1x^{n-1}+...+a_1^1x+a_0^1\,,$$
$$P_n^2(x)=a_n^2x^n+a_{n-1}^2x^{n-1}+...+a_1^2x+a_0^2\,,$$

oraz α,β są liczbami rzeczywistymi, przy czym $\beta\neq 0$. Zaznaczmy, że stopień któregoś z wielomianów $P_n^1(x),\ P_n^2(x)$ może być i mniejszy niż n, ponadto jeden z tych wielomianów może być nawet zerem. Liczba n jest maksymalnym stopniem obu wielomianów. Wtedy mamy dwie możliwości:

4. Jeżeli liczba zespolona $\alpha+i\beta$ nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego (15), to rozwiązanie szczególne równania (12) szukamy w postaci

$$\psi(x)=\mathrm{e}^{\alpha x}\left(Q_n^1(x)\cos\beta x+Q_n^2(x)\sin\beta x\right), \tag{24}$$

gdzie $Q_n^1(x),\ Q_n^2(x)$ są wielomianami stopnia $n\in\mathbb{N}$ z nieoznaczonymi współczynnikami.

5. Jeżeli liczba zespolona $\alpha + i\beta$ jest pierwiastkiem równania charakterystycznego (15), to rozwiązanie szczególne równania (12) szukamy w postaci

$$\psi(x) = x\mathrm{e}^{\alpha x}\left(Q_n^1(x)\cos\beta x + Q_n^2(x)\sin\beta x\right). \tag{25}$$

Przykład 10. Rozwiązać równanie

$$y'' - y = \mathrm{e}^x(x\cos x + \sin x). \tag{26}$$

Rozwiązanie. Mamy tu

$$f(x) = \mathrm{e}^x(x\cos x + \sin x).$$

Zatem

$$\alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad P_n^1 = x, \quad P_n^2 = 1, \quad n = 1.$$

Równanie charakterystyczne dla równania (26) ma postać

$$\lambda^2 - 1 = 0.$$

Pierwiastkami tego równania są liczby $\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 1$. Tak więc liczba zespolona $\alpha + i\beta = 1 + i$ nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego. Zatem rozwiązanie szczególne równania (26) szukamy w postaci (24):

$$\psi(x) = \mathrm{e}^x\left((Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x\right),$$

gdzie A, B, C, D są niewiadomymi współczynnikami. Dla określenia tych współczynników obliczamy

$$\psi'(x) = \mathrm{e}^x\left((Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x\right) +$$
$$+\mathrm{e}^x\left(A\cos x - (Ax + B)\sin x + C\sin x + (Cx + D)\cos x\right)$$

oraz

$$\psi''(x) = \mathrm{e}^x\left((Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x\right) +$$
$$+2\mathrm{e}^x\left(A\cos x - (Ax + B)\sin x + C\sin x + (Cx + D)\cos x\right) +$$
$$+\mathrm{e}^x\left(-2A\sin x - (Ax + B)\cos x + 2C\cos x - (Cx + D)\sin x\right).$$

Po przekształceniach mamy

$$\psi''(x) = 2\mathrm{e}^x\left((Cx + A + C + D)\cos x + (-Ax - A - B + C)\sin x\right).$$

Podstawiając $\psi(x)$ i $\psi''(x)$ do równania (26) i dzieląc obustronnie przez e^x otrzymamy tożsamość

$$((2C - A)x + 2A + 2C + 2D - B)\cos x +$$
$$+((-2A - C)x - 2A - 2B + 2C - D)\sin x =$$
$$= x\cos x + \sin x.$$

Porównując współczynniki przy $\cos x$ i $\sin x$ dostajemy równości

$$(2C-A)x+2A+2C+2D-B=x,$$
$$(-2A-C)x-2A-2B+2C-D=1.$$

Zatem porównując współczynniki przy odpowiednich potęgach x po prawej i lewej stronie otrzymamy układ równań postaci

$$\begin{cases} 2C-A=1, \\ 2A+2C+2D-B=0, \\ -2A-C=0, \\ -2A-2B+2C-D=1. \end{cases}$$

Stąd mamy

$$A=-\frac{1}{5},\quad B=\frac{4}{25},\quad C=\frac{2}{5},\quad D=-\frac{3}{25}.$$

Tak więc rozwiązaniem szczególnym równania (26) jest funkcja

$$\psi(x)=\mathrm{e}^x\left(\left(-\frac{1}{5}x+\frac{4}{25}\right)\cos x+\left(\frac{2}{5}x-\frac{3}{25}\right)\sin x\right).$$

Rozwiązanie ogólne równania (26) dane jest wzorem

$$y=C_1\,\mathrm{e}^{-x}+C_2\,\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x\left(\left(-\frac{1}{5}x+\frac{4}{25}\right)\cos x+\left(\frac{2}{5}x-\frac{3}{25}\right)\sin x\right),$$

gdzie C_1 i C_2 są dowolnymi stałymi rzeczywistymi.

Przykład 11. Rozwiązać równanie

$$y''+4y=\cos 2x. \tag{27}$$

Rozwiązanie. Mamy tu

$$f(x)=\cos 2x,$$

a więc

$$\alpha=0,\quad \beta=2,\quad P_n^1=1,\quad P_n^2=0,\quad n=0.$$

Równanie charakterystyczne dla równania (27) ma postać

$$\lambda^2+4=0.$$

Zatem mamy dwa pierwiastki zespolone:

$$\lambda_1=2i,\quad \lambda_2=-2i.$$

Stąd rozwiązanie ogólne odpowiedniego równania jednorodnego ma postać

$$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x,$$

gdzie C_1 i C_2 są dowolnymi stałymi rzeczywistymi.

Ponieważ liczba $\alpha+\beta i=2i$ jest pierwiastkiem równania charakterystycznego, więc rozwiązanie szczególne równania (27) szukamy w postaci (25), mianowicie

$$\psi(x)=x\left(A\cos 2x+B\sin 2x\right).$$

Różniczkując mamy

$$\psi'(x)=A\cos 2x+B\sin 2x+x\left(-2A\sin 2x+2B\cos 2x\right)$$

oraz

$$\psi''(x)=-2A\sin 2x+2B\cos 2x-2A\sin 2x+2B\cos 2x-$$
$$-4Ax\cos 2x-4Bx\sin 2x.$$

Podstawiając $\psi(x)$ i $\psi''(x)$ do równania (27) otrzymamy

$$-2A\sin 2x+2B\cos 2x-2A\sin 2x+2B\cos 2x-$$
$$-4Ax\cos 2x-4Bx\sin 2x+4Ax\cos 2x+4Bx\sin 2x=\cos 2x.$$

Stąd

$$-4A\sin 2x+4B\cos 2x=\cos 2x.$$

Porównując współczynniki przy $\cos 2x$ i $\sin 2x$ dostajemy układ równań

$$\begin{cases}-4A=0,\\ 4B=1.\end{cases}$$

Stąd

$$A=0,\quad B=\frac{1}{4}.$$

Tak więc rozwiązaniem szczególnym równania (27) jest funkcja

$$\psi(x)=\frac{1}{4}x\sin 2x.$$

Zatem rozwiązanie ogólne równania (27) ma postać

$$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{1}{4}x\sin 2x.$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Korzystając z metody przewidywania (metoda współczynników nieoznaczonych) rozwiązać podane równania:

1. $y''-y=5x+2$;

2. $y''+y'-2y=6x^2$;

3. $y'' - 3y' = 2 - 6x$;
4. $y'' - y = x^2 + 1$;
5. $y'' - 4y' + 4y = x^3$;
6. $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + 2x - 1$;
7. $y'' + 6y' + 5y = \mathrm{e}^{2x}$;
8. $y'' + 4y' + 3y = 9\mathrm{e}^{-3x}$;
9. $y'' - 2y' - 3y = \mathrm{e}^{4x}$;
10. $y'' - y = 2\mathrm{e}^{x}$;
11. $y'' + y = 4x\mathrm{e}^{x}$;
12. $y'' + y' - 2y = 3x\mathrm{e}^{x}$;
13. $y'' + 2y' - 3y = x^2\mathrm{e}^{x}$;
14. $y'' - 5y' + 4y = 4x^2\mathrm{e}^{2x}$;
15. $y'' + y = \sin x$;
16. $y'' - 6y' + 25y = 2\sin x + 3\cos x$;
17. $y'' - 3y' + 2y = \cos x$;
18. $y'' - 3y' + 2y = \sin x + \cos x$;
19. $y'' - 3y' + 2y = x\cos x$;
20. $y'' - 2y' + 2y = \cos x$;
21. $y'' + y = x\sin x$;
22. $y'' - 4y = \mathrm{e}^{2x}\cos x$.

Opracowanie:
dr Igor Kierkosz
dr hab. Volodymyr Sushch